2.1 信号和向量空间 2021年1月20日15点00分

定义2.1 **向量空间**V是具有两个运算的非空集,这两个运算称为向量加法和标量乘法.对于元素和标量向量加法和标量乘法具有以下特性:

1. 闭包[closure]:
2. 交换性:
3. 结合性:(注意是两个标量的乘积,而是标量和向量的乘积.)
4. 分配性:(注意是两个标量的和,而是两个向量的和.)
5. 加法恒等元素:存在一个元素0∈V,使得每个u∈V都有0 + u = u.
6. 加法逆元素:对于每个u∈V,都有一个元素𝑤∈V，使得u +𝑤=0。（可以方便地写为𝑤= -u。）
7. 乘法恒等:标量1具有属性.

2.2 有限维向量空间 2021年1月20日16点40分

如果向量是元组,则向量空间是**有限维的**.如果向量空间不是有限维,则它是**无限维**.向量空间是有限维的,而和是无限维的.在本节中,为有限维空间开发了一些重要的向量空间原理.从二维和三维的几何学中将很熟悉这些.新功能只是对复数和更高维的扩展.之后,在2.3节中,我们将看到相同的几何直觉如何自然而有力地扩展到无限维空间.有限维向量空间是第3章的基础,第4和第5章基于无限维空间.

2.2.1 范数和度量 2021年1月20日16点49分

定义2.2 向量空间V上的范数是映射,满足向量和标量的以下条件:

1. 非负性:
2. 非退化性[nondegeneracy]:当且仅当
3. 缩放性:
4. 三角形不等式:

在向量空间上定义的范数称为**范数向量空间**,或仅称为**范数空间**.

定义2.3 空间的**度量**是一个函数,对于,具的以下特性:

1. 非负性:
2. 非退化性:当且仅当
3. 对称性:
4. 三角形不等式:.

如果空间具有度量,则称为度量空间.

2.2.2 内积 2021年1月20日17点45分

定义2.4 向量空间上的**内积**是一个映射,使得对于和为常数,

1. ,
2. ,
3. ,
4. 当时,.

具有内积的向量空间称为内积空间.

有许多有趣的结果将内积与规范联系起来.其中包括平行四边形定律(图2.2):

和极化恒等式[polarization identity]:

定理2.1(Cauchy-Schwarz不等式) 令为一个内积空间,且.则,

当时,c是常量,等号成立.

定义2.5(正交性) 令为内积空间,且.向量和是正交的当且仅当它们的内积为零.

定理2.2(勾股定理) 令为内积空间,且.如果向量和是正交,则

如果u和v是实数且,则它们是正交的.

2.2.3 正交展开和逼近 2021年1月20日18点48分

定义2.6 对线性独立、span、基向量、向量空间的维度和正交基的定义,已经再其它线性代数教材上见过好多次了,这里不再重复.

**51页有重要内容,有时间可以补充上**.

该定理之前有一段与之相关的文字

**定理2.3(正交原理)** 令为维内积空间,为的维子空间.如果,则

极小化的近似向量是正交投影到的向量:

其中是U的标准正交基.

残差向量[residual vector]垂直于U,因此且.

极小化近似误差为

定理2.4(Parseval的公式) 令为维内积空间,为的标准正交基.对于,

并且如果,则

**例题2.10 Haar基** 上述两个定理的应用

2.3 无限维向量空间 2021年1月27日17点02分

开篇简单讨论无限维向量的范数、内积和正交近似的定义,函数的内积和收敛序列.

2.3.1 收敛序列 2021年1月27日17点12分

序列的定义、符号表示和举例

**定义2.8(收敛序列)** 令是度量空间V中的一个无穷序列,对于某个和任意,如果存在一个N使得当时,则该序列被称为**收敛的[converges]**.我们说,且被称为序列的**极限点**.

换句话说,如果在x周围放置任意小的半径的邻域,则会发现一个N,使得及其后的所有项都在邻域内.不管邻域变得多小,邻域内比外面总是会有更多的点.

**定义2.9(柯西序列)** 令是度量空间中的一个无穷序列,对于任意,如果存在一个,使得当时,则该序列被称为**柯西序列**.

**定义2.10(完整度量空间)** 如果度量空间中的每个柯西序列收敛(有极限点),则该度量空间是**完整的**.

2.3.2 无穷序列和空间 2021年1月27日18点24分

定义2.11 令或.如果,则是**绝对可加[absolutely summable]**;如果,则是**平方可加[square summable]**;如果,则x是**有界的**.

使用这些定义,可得到以下内容:

1. 所有绝对可加序列的集合是一个向量空间(即),其范数为.
2. 所有平方可加序列的集合是一个向量空间,,其范数为.
3. 所有有界序列的集合是一个向量空间,,其范数为.

通常,对于,是具有有限范数的序列的空间,定义为

因此可以得出:

1. 范数是范数随的极限.
2. 在所有空间中,只有是一个内积空间.
3. 空间是内嵌的:如果,则.特别的,.如果一个序列是绝对可加的,那么它也是平方可加和有界的.另一方面,如果序列是无界的,那么它在任何意义上都不是可加的.

2.3.3 函数和空间 2021年1月28日09点25分

**定义2.12** 令(Q可以是,,或),令是一个函数.如果,则在上是**绝对可积**;如果,则在上是**平方可积**;如果,则在**上有界的**.

根据上述定义,得到

所有绝对可积函数的集合在Q上是向量空间,记为或简写为,如果其定义域是已知的,它的范数为

所有平方可积函数的集合在Q上是向量空间,记为,其范数为

所有有界函数的集合在Q上是向量空间,其范数为

下标u表示“统一”.最高范数也称为统一范数.有界函数的向量空间表示为.

一般情况下,空间是函数F在Q上具有有限的p范数,其中,定义为

**物理信号和函数空间**

范数对信号中的能量或功率具有物理解释.例如,在电气系统中,通过电阻为R电阻器且电流为的瞬时功率为.以此类推,我们可以将任何函数的平方大小视为广义瞬时功率.幂的积分是能量,所以的积分(范数的平方)是该函数的总能量:

在有限的时间区间(例如)中平均瞬时功率给出该区间的均方值或平均功率.在应用中特别令人感兴趣的是长时间平均值.

该积分的平方根称为的均方根或rms值:

**关于函数空间的微妙之处**

本小节对特殊函数和测度给出了一些简单说明，值得阅读。但是篇幅稍长，因此略过。

**定义2.13** 令Q⊂和f：Q→ℂ为函数.如果集合

具有测度0,则f的任意属性被称为在所有处几乎[almost everywhere]成立.

有界函数在测度0集上的的积分为零(这对于孤立点的有限集很明显,对于更通用的集也可以显示).如果和几乎在所有地方都相等,则为零(除了测度0集),因此它们的范数也相等,.另一方面,如果和在区间不同,则逐点且.(图2.17)

除非我们另有说明,否则在函数空间中,所有属性都将被假定为在几乎所有地方都具有含义.

统一范数并不兼容几乎在所有处相等的思想.仅在各处时才给出.我们将继续使用该范数,因为它在某些应用中很有用,但是我们还需要找到一个最高范数,当时,给出.根据上面的定义,给定,如果集合

具有测度0,我们说函数**几乎在所有地方有界[bounded almost everywhere]**.然后定义另一个范数

该范数是最小的M使得尽在测度0集上.它被称为基本最高范数[essential supremum norm],并在图2.18中进行了说明.它也是一般范数的极限()(公式2.31).

**内积和正交函数** 2021年1月28日14点45分

我们可以通过类似于有限维情况定义函数的内积:

当该积分存在时是内积.这是一个常见的定义,但不是唯一可能的定义(请参阅其他问题).它满足内积的四个要求(定义2.4):

这里省略.

2.3.4 和的正交展开 2021年1月28日15点54分

定理2.5(Bessel不等式) 令是内积空间V中的标准正交基.则,对于每一个向量,

定义2.14(完整标准正交基) 标准正交基在内积空间V中是**完整的**仅当V中垂直于每一个的向量是零零向量.

定理2.6 令是Hilbert空间V中完整标准正交基.则,对于向量:

在范数中.

保守范数.

,保守内积.